

ISOMÉTRIES DU PLAN ET DE L'ESPACE

Une iso-étrie est une transformation qui conserve les distances.

Une iso-étrie entre deux espaces euclidiens conserve l'orthogonalité (théorème de PYTHAGORE) et les angles (théorème d'AL-KASHI)

Soit E un espace affine euclidien dirigé par l'espace vectoriel euclidien E et $f: E \rightarrow E$ une iso-étrie alors f est une application linéaire, sa partie linéaire est une iso-étrie vectorielle

Une iso-étrie vectorielle $\vec{f}$ d'un espace vectoriel euclidien E conserve le produit scalaire $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \vec{f}(\vec{u}) \cdot \vec{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v})$

La matrice de $\vec{f}$ par rapport à une base orthonormée est une matrice orthogonale

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{f})$$

$${}^t A A = I_n$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

I Isométrie de plan

1) Matrices orthogonales 2×2

$$A \in O_2(\mathbb{R})$$

1^{er} cas $\det A = 1$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π)

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2^e cas $\det A = -1$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π)

$$A = S_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Spec } R_\theta = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\} \quad \text{cas particulier}$$

$$\theta = 0 \quad R_0 = I_2$$

$$\theta = \pi \quad R_\pi = -I_2$$

Rotation d'angle θ

$$\text{Spec } S_{\theta/2} = \{1, -1\}$$

$$u_1 = (\cos \theta/2, \sin \theta/2) \quad u_{-1} = (-\sin \theta/2, \cos \theta/2)$$

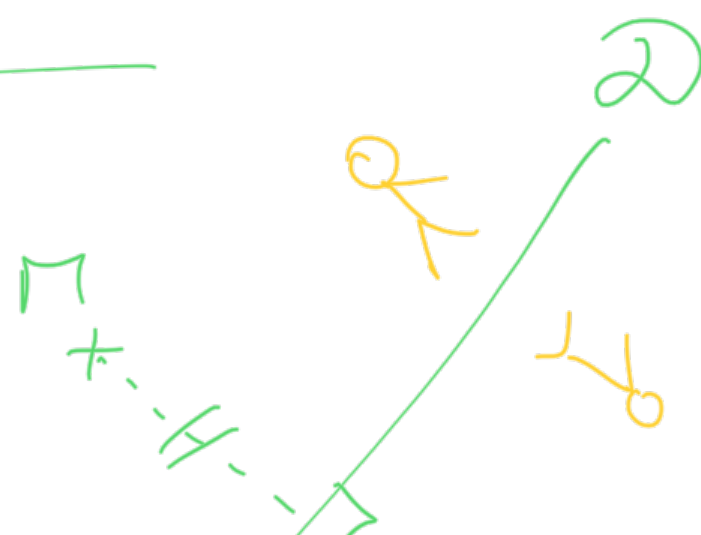
Symétrie orthogonale par rapport à E_1

2) Iso-étrie du plan :

	orientation	points fixe	patte linéaire
Rotation autre A angle $\theta \neq 0 [2\pi]$	directe	$\{A\}$	R_θ
Translation non triviale	directe	$\emptyset$	$I_2 = R_0$
identifié	directe	P	$I_2 = R_0$
Symétrie axiale par rapport à $D_{\theta/2}$	indirecte	$D_{\theta/2}$	$S_{\theta/2}$
Symétrie glissée	indirecte	$\emptyset$	$S_{\theta/2}$

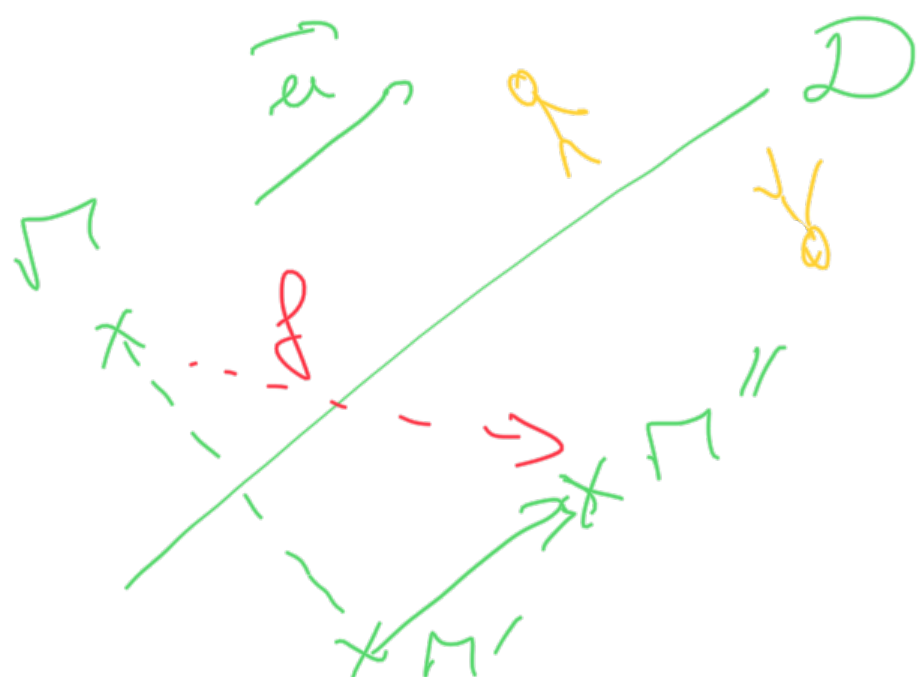
La rotation de centre A et d'angle θ
associe à tout M du plan l'unique
point M' tel que $AM = AM'$ et
 $(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \theta$

Symétrie axiale

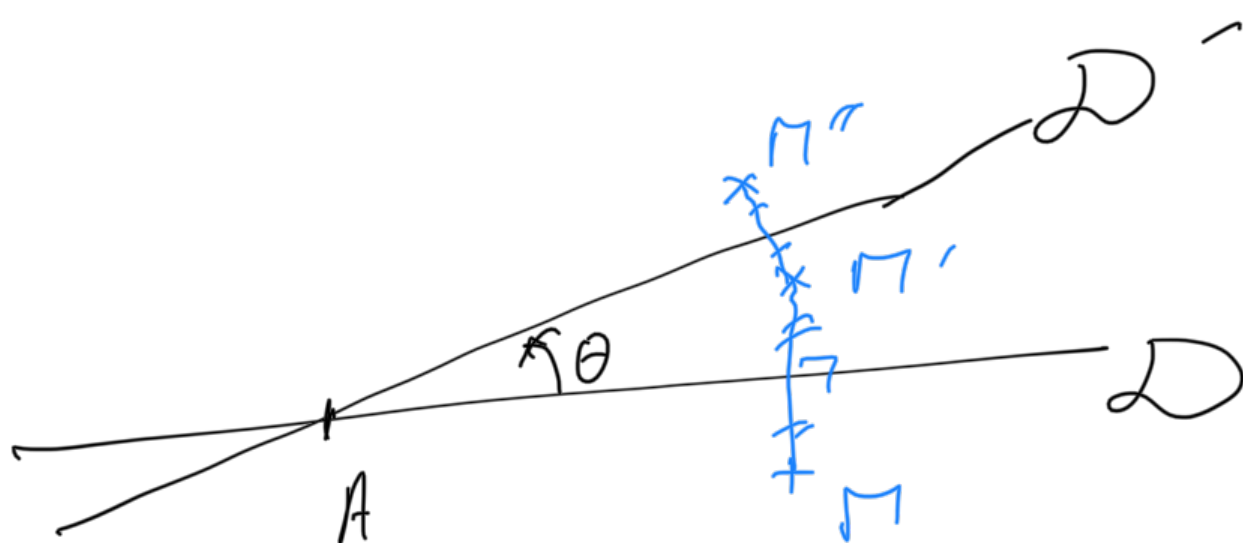


Symétrie glissée: $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$

(avec $\vec{u}$ un vecteur directeur de D)



Thm Toute isométrie du plan se décompose comme le produit de 0, 1, 2 ou 3 symétries axiales



$$s_{D'} \circ s_D = R_{A, 2\theta}$$



$$s_{D'} \circ s_D = t_{2\vec{u}}$$



$$\overline{MM''} = 2\vec{u}$$

II Isométries de l'espace

1) Matrices orthogonales

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \quad (\text{def: } {}^t A A = I_n)$$

elles conservent le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \text{si } y = Ax \text{ alors } {}^t y y &= {}^t (Ax) Ax = {}^t x {}^t A A x \\ &= {}^t x ({}^t A A) x = {}^t x I_n x \\ &= {}^t x x \end{aligned}$$

$$\underline{\det A = \pm 1} : \text{ car } \det I_n = \det({}^t A A) = 1$$

$$\det {}^t A \det A = (\det A)^2$$

les valeurs propres (complexes) de A sont de module 1 :

Soit $x \in \mathbb{C}^n$ $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$Ax = \lambda x \text{ alors } {}^t \overline{Ax} Ax = ({}^t \overline{A} \overline{x}) Ax$$

$$= {}^t \overline{x} {}^t \overline{A} A x = {}^t \overline{x} {}^t A A x = {}^t \overline{x} x$$

$$= {}^t (\overline{\lambda} x) (\lambda x) = {}^t (\overline{\lambda} \overline{x}) \lambda x = \overline{\lambda} \lambda {}^t \overline{x} x$$

$$= |\lambda|^2 {}^t \overline{x} x$$

$$\text{Or } {}^t \overline{x} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ donc } |\lambda|^2 = 1.$$

L'orthogonal d'un sous-espace propre est stable

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre (donc $\lambda = \pm 1$)
et E_λ le sous-espace propre

Soit $X \in E_\lambda^\perp$ (par définition $\forall Y \in E_\lambda \quad {}^tXY = 0$)

Montrons que $AX \in E_\lambda^\perp$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } Y \in E_\lambda \quad {}^t(AX)(AY) &= {}^tX {}^tAAY \\ &= {}^t(AX)(\lambda Y) = {}^tX Y = 0 \\ &= \lambda {}^t(AX)Y \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \lambda = \pm 1 \neq 0 \quad {}^t(AX)Y = 0$$

2) Matrices orthogonales en dimension 3

Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale

En dimension 3, le polynôme caractéristique est de degré 3, il a donc au moins une racine réelle, 1 ou -1.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre.

On complète u en $B' = (u, v, w)$ une base orthonormée, on considère P la matrice de passage de la base canonique B vers B'

(les colonnes de P sont u, v et w)

la matrice P est orthogonale (car B' est orthonormée) et

$${}^t P A P = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \begin{array}{c} B \\ \\ \end{array}$$

← car $u^+ = \langle v, w \rangle$ est stable par A .

la matrice B est orthogonale car on peut faire le produit par blocs:

$$\begin{aligned} {}^t ({}^t P A P) ({}^t P A P) &= \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= {}^t P {}^t A {}^t P {}^t P A P = {}^t P {}^t A P {}^t P A P \\ &= {}^t P {}^t A I_3 A P = {}^t P {}^t A A P = {}^t P I_3 P \\ &= {}^t P P = I_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

On peut alors revenir à la classification ci-dessus des matrices du $O_2(\mathbb{R})$.

Prop: Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A P$ est l'une des matrices suivantes:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \quad \theta \neq 0 [\pi]$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right) \quad \theta \neq 0 [\pi]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} /$$

I_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Isométries affines de l'espace

Nous pouvons maintenant classifier les isométries affines de l'espace en fonction de la partie linéaire et de la présence ou non de points fixes

Rappel: f une transformation affine de E
de partie linéaire $\vec{f} \in \mathcal{L}(E)$

- Si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ alors f possède un unique point fixe
- Si 1 est valeur propre de $\vec{f}$ alors deux cas sont possibles :

- f n'a pas de points fixes

- L'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine dirigé par E_1

(le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1)

Il existe une base orthonormée B pour laquelle la matrice de f est

$$I_3$$

points fixes

	$\emptyset$	$\mathcal{E}$
I_3	translation	id $_E$
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_\theta & \end{array} \right) \quad \theta \neq 0[\pi]$	$\emptyset$	$\mathcal{D}$
	vissage d'angle θ	rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ
$\left(\begin{array}{c cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$	$\emptyset$	$\mathcal{D}$
	demi-tour vissé	demi-tour d'axe $\mathcal{D}$
$\left(\begin{array}{c cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_\theta & \end{array} \right) \quad \theta \neq 0[\pi]$	$\{A\}$	
	anti rotation d'axe la droite passant par A et de direction $\vec{u}_1$ et d'angle θ	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\emptyset$	$\mathcal{P}$
	Symétrie orthogonale par rapport à un plan glissée	Symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$
$-I_3$	$\{A\}$	
	Symétrie centrale non rapport à A	

